প্ৰসমান্য বক্ৰ ৰেখা
(The Normal Probability Curve)

• পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানত এটা ঘন্টাৰ আকৃতিৰ ৰেখাটোকে প্ৰসমান্য বক্ৰৰেখা বুলি কোৱা হয়।

পোন প্ৰথমে ১৭৩৩ চনত ফৰাচী গণিতজ্ঞ Abraham De Moivre এ এই ধাৰণাৰ ব্যৱহাৰ কৰিছিল।

বৈশিষ্ট্য :→

• প্ৰসমান্য বক্ৰ হৈছে এক ঘন্টা আকৃতিৰ ৰেখা।

• এই ৰেখাই কেতিয়াও ভূমি ৰাশি স্পৰ্শ নকৰে।

• এই ৰেখা সমমিত।

• প্ৰসমান্য বক্ৰত গাণিতিক গড়, মধ্যমা আৰু বহুলকৰ অৱস্থান সোঁমাজত।

• গড়ৰ সোঁফালে ৰেখাৰ 50% সামগ্ৰী আৰু বাওঁফালে 50% সামগ্ৰী থাকে।

• প্ৰসমান্য বক্ৰৰ ক্ষেত্ৰত চতুৰ্থক বিচ্যুতিক সাম্ভাব্য ত্ৰুটি বুলি কোৱা হয়। (Probable Error)

• প্ৰসমান্য বক্ৰত প্ৰথম চতুৰ্থক আৰু তৃতীয় চতুৰ্থক মধ্যমানৰ পৰা সমান দূৰত অৱস্থিত।

• প্ৰথম চতুৰ্থক আৰু তৃতীয় চতুৰ্থকৰ মাজত বিভাজনৰ শতকৰা 50 ভাগ থাকে।

• প্ৰসমান্য বক্ৰই আগুৰা ঠাইৰ মুঠ কালিৰে বিভাজনৰ মুঠ বাৰংবাৰতা বুজায়।

• প্ৰসমান্য বক্ৰ সম্পূৰ্ণ সমমিত হোৱাৰ বাবে সাম্ভাব্য ত্ৰুটি (Probability Error) আৰু চতুৰ্থকৰ মান সমান হয়।

$$[PE = 0.67450]$$

• প্ৰসমান্য বক্ৰৰ পৰা বিচলন দুই ধৰণে হ'ব পাৰে :-

ⓐ বিষমতা (Skewness)

ⓑ কুকুদৰ ক্ৰতা (Kurtosis)

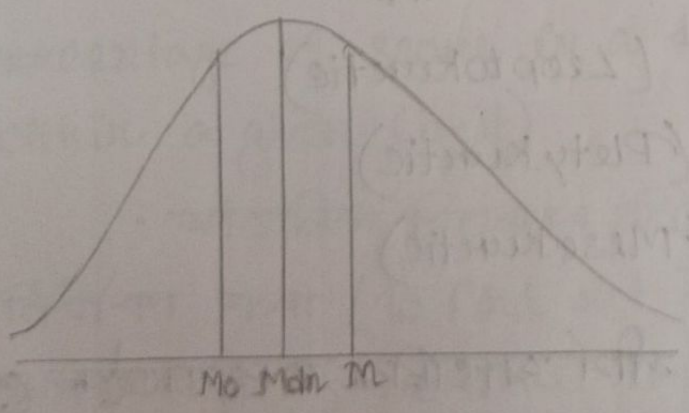
* বিষমতা কি? (What is Skewness)

Answer :- স্বাভাৱিক বিতৰণৰ গড়-মধ্যমা আৰু বহুলক একেটা বিন্দুতে অৱস্থিত হোৱা বাবে ই সমমিত। কিন্তু যেতিয়া গড় মধ্যমা আৰু বহুলক একে বিন্দুত নপৰি অসমমিত হয় তেনে অৱস্থাক বিষমতা (Skewness) বুলি কোৱা হয়।

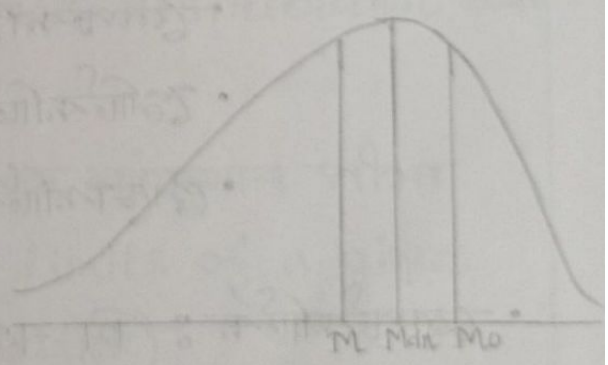
বিষমতা দুই ধৰণৰ হ'ব পাৰে —

(i) ধনাত্মক বিষমতা (Positive Skewness)

(ii) ঋণাত্মক বিষমতা (Negative Skewness)



ধনাত্মক বিষমতা



ঋণাত্মক বিষমতা

• ধনাত্মক বিষমতা :- যি বিতৰণত ৰাশিবোৰ নিম্ন-দিশৰ ফালে কেন্দ্ৰীভূত হয়, উচ্চ দিশৰ প্ৰতি ক্ৰমান্বয়ে কমি যায় আৰু সোঁ ফালে এঢলীয়া হৈ

যায়, তাকে ধনাত্মক বিষমতা বোলে।

$$M > Mdn > Mo$$

• ঋণাত্মক বিষমতা :- যি বিতৰণত ৰাশিবোৰ উচ্চ দিশৰ ফালে কেন্দ্ৰীভূত হয় আৰু নিম্ন দিশৰ ফালে ক্ৰমান্বয়ে কমি যায় আৰু বাওঁফালে এঢলীয়া হৈ যায় তাকে ঋণাত্মক বিষমতা বোলে।

$$M > Mdn > Mo$$

* কুকুদবক্ৰতা কি? (What is Kurtosis)

Answer :- প্ৰসমান্য বক্ৰৰ অন্য এক বিচলন হ'ল কুকুদবক্ৰতা বা Kurtosis। যেতিয়া বিতৰণৰ মাজৰ অংশত সামগ্ৰী অতিমাত্ৰা গোট খায় আৰু স্বাভাৱিকতা কমি ৰাশিবোৰ আঁতৰি গৈ লেখচিত্ৰ দেখিবলৈ জোঙা বা চেপেটা হৈ উঠে, তেনে অৱস্থাক কুকুদবক্ৰতা বা Kurtosis বুলি কোৱা হয়।

ইয়াক তিনিধৰণে পোৱা যায় —

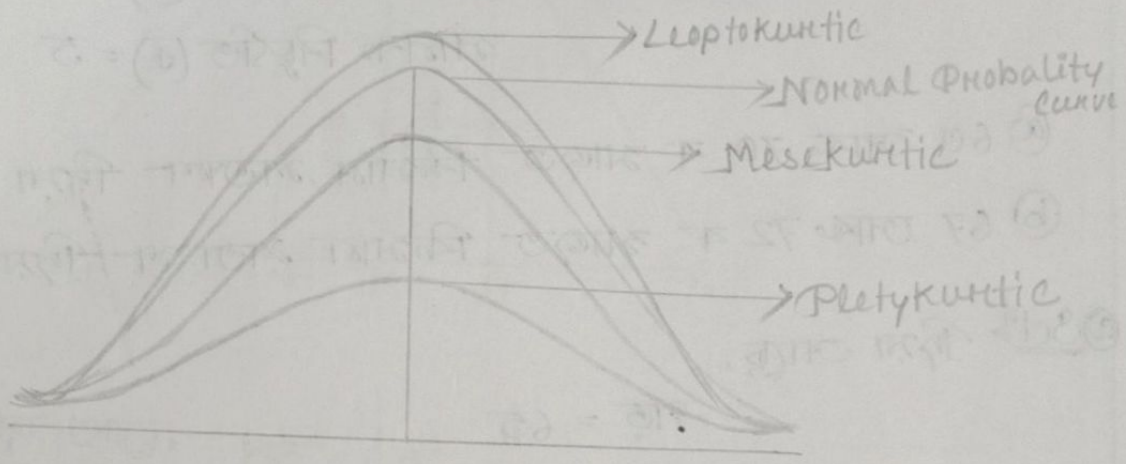
• লেপ্টকাৰ্টিক (Leoptokurtic)
• প্লেটিকাৰ্টিক (Pletykurtic)
• মেচোকাৰ্টিক (Mesokurtic)

• লেপ্টকাৰ্টিক :- যি বক্ৰৰ শীৰ্ষ স্বাভাৱিক অৱস্থাতকৈ বেছি জোঙা বা ওখ হয়, তাক Leoptokurtic বুলি কোৱা হয়।

• প্লেটিকাৰ্টিক :- যি বক্ৰৰ শীৰ্ষ স্বাভাৱিক অৱস্থাতকৈ ভোটা আকৃতিৰ হয়, তাক Pletykurtic

বুলি কোৱা হয়।

• মেচোকাৰ্টিক :- যি বক্ৰৰ শীৰ্ষ স্বাভাৱিক অৱস্থাতকৈ বেছি ওখও নহয় আৰু ভোটা আকৃতিৰো নহয়, বিতৰণৰ মধ্যৱৰ্তী অৱস্থাত থাকে তেনে বক্ৰক মেচোকাৰ্টিক (Mesokurtic) বুলি কোৱা হয়।



চিত্ৰ :- কুকুদবক্ৰতা (Kurtosis)

*প্ৰসমান্য বক্ৰৰ ব্যৱহাৰ :-

• দুটা নিৰ্দ্দিষ্ট নম্বৰৰ মাজত মুঠ সামগ্ৰীৰ শতকৰা কিমান ভাগ পৰিব তাক নিৰ্ধাৰণ কৰা (Two determine the percentage of score in a normal distribution ~~wti~~ within a given limit)

• স্বাভাৱিক বিতৰণৰ নিৰ্ধাৰিক শতাংশৰ সীমা নিৰ্ধাৰণ কৰা (To find out the limits of a given percentage of normal distribution)

• দুটা বিভাজন কিমান উপৰা-উপৰি হৈ আছে তাক তুলনা কৰা (To compare two distributions in terms of overlapping)

• পৰীক্ষাৰ প্ৰশ্নৰ জটিলতা তুলনামূলকভাৱে নিৰ্ধাৰণ কৰা (To determine the relative difficulty of test problems)

Application 1 :→ ২টা নমুনাৰ মাজত মুঠ সামগ্ৰীৰ কিমান ভাগ পৰিব ?

Example 1 :→ কোনো এটা বিতৰণৰ গড় (μ) = 65

মানক বিচ্যুতি (σ) = 5

ⓐ 60 আৰু 70 ৰ মাজত কিমান শতাংশ দিয়া আছে ?

ⓑ 67 আৰু 72 ৰ মাজত কিমান শতাংশ দিয়া আছে ?

ⓐ Soln → দিয়া আছে,

$$\text{গড়} = 65$$

$$\sigma = 5$$

$$60 \text{ ৰ } Z \text{ মান} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$= \frac{60 - 65}{5}$$

$$= \frac{-5}{5}$$

$$= -1\sigma$$

∴ Table A ৰ মতে -1σ = 34·13

$$70 \text{ ৰ } Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$= \frac{70 - 65}{5}$$

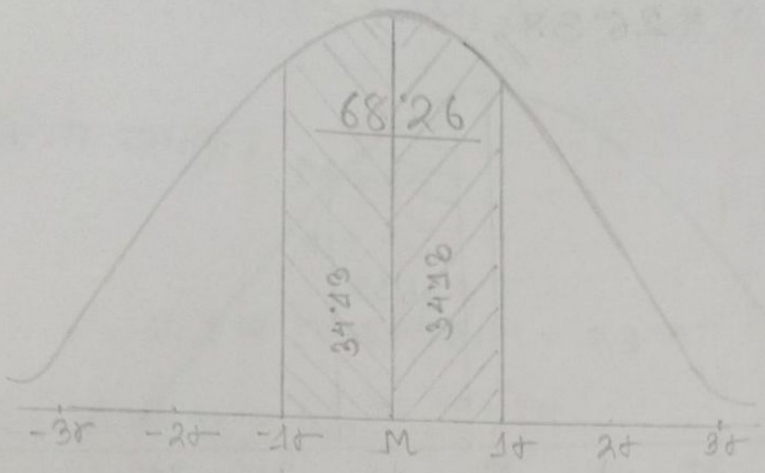
$$= \frac{5}{5}$$

$$= 1\sigma$$

∴ Table A ৰ মতে 1σ ৰ মান = 34·13 //

প্রতিকে দেখা গেল যে Table A ব মতে 60(-1σ) ব মান 34.13 আর 70 (1σ) ব মান হচ্ছে 34.13

$$34.13 + 34.13 = 68.26 //$$



⑥ Soln: দিয়া আছে, গড় = 65

$\sigma = 5$

67 ব Z মান $= \frac{X-M}{\sigma}$

$= \frac{67-65}{5}$

$\Rightarrow \frac{2}{5} = .4\sigma$

∴ Table A ব মতে $.4\sigma = 15.54$

Again, 72 ব Z মান $= \frac{X-M}{\sigma}$

$= \frac{72-65}{5}$

$\Rightarrow \frac{7}{5} = 1.4\sigma$

∴ Table A ব মতে $1.4\sigma = 41.92$

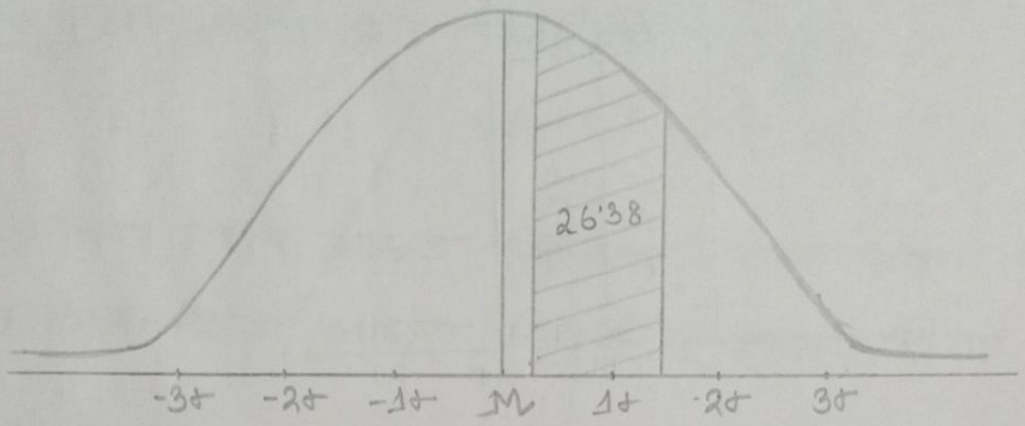
প্রতিকে দেখা গেল যে Table A ব মতে 67 (.4σ) ব মান হচ্ছে 15.54 আর 72 (1.4σ) ব মান হচ্ছে 41.92 ।

$\therefore 15.54 + 41.92 = 57.46$

67 আৰু 72 ৰ মাজত শতকৰা $1.4\sigma - .4\sigma$

$41.92 - 15.54$

$= 26.38$



Example 2:→ কোনো স্বাভাৱিক বিতৰণৰ গড় $(M) = 15$

মানক বিচ্যুতি $(\sigma) = 5$

ⓐ 10 আৰু 20 ৰ মাজত শতকৰা কিমান সামগ্ৰী আছে ?

ⓑ 21 ৰ ওপৰত কিমান শতাংশ আছে ?

ⓐ Sol^n দিয়া আছে, $M = 15$

$\sigma = 5$

$\therefore$ 10 ৰ Z মানাংক $= \dfrac{X - M}{\sigma}$

$\Rightarrow \dfrac{10-15}{5} = \dfrac{-5}{5}$

$= -1\sigma$

$\therefore$ Table A ৰ মতে $-1\sigma = 34.13$

$\therefore$ 20 ৰ Z মানাংক $= \dfrac{X - M}{\sigma}$

$\Rightarrow \dfrac{20-15}{5} = \dfrac{5}{5}$

$= 1\sigma$

∴ Table A ব মতে 1σ = 34.13

পার্শ্বকে দেখা গেল যে 10(−1σ) ব মান 34.13 আবার 20(1σ) ব মান 34.13 ।

∴ 34.13 + 34.13 = 68.26 //

⑥ 30। দিয়া আছে, M = 15

σ = 5

∴ 21 ব ঊর্ধ্বসীমা = 21.5

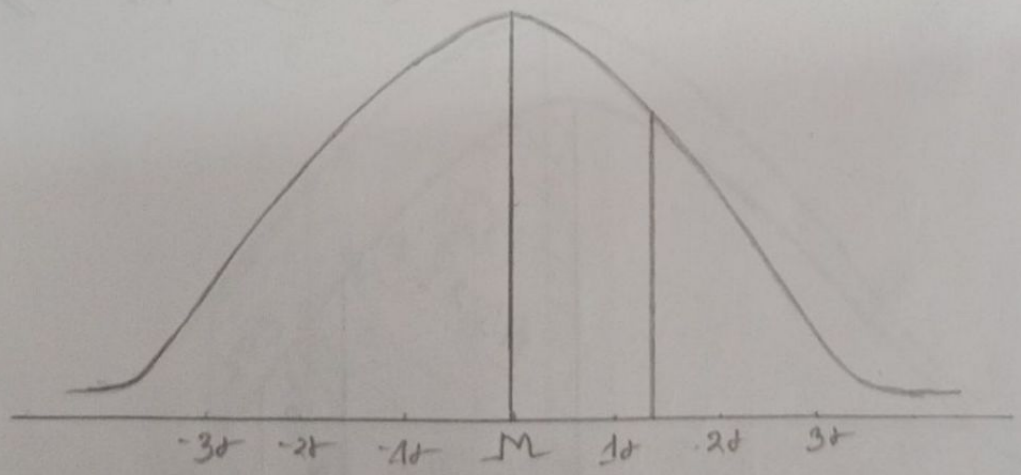
21.5 ব Z মান = $\frac{X - M}{\sigma}$

$= \frac{21.5 - 15}{5}$

$= \frac{6.5}{5}$

$= 1.3\sigma$

∴ Table A ব মতে 1.3σ = 40.32 //



Example 3:→ গড় (M) = 65

মানক বিচ্যুতি (σ) = 5

ⓐ 75 ৰ ওপৰত কিমান শতাংশ সামগ্ৰী আছে ?

Solⁿ→ দিয়া আছে, M = 65

σ = 5

We know that,

75 ৰ উচ্চসীমা = 75.5

∴ 75.5 ৰ Z মানাংক

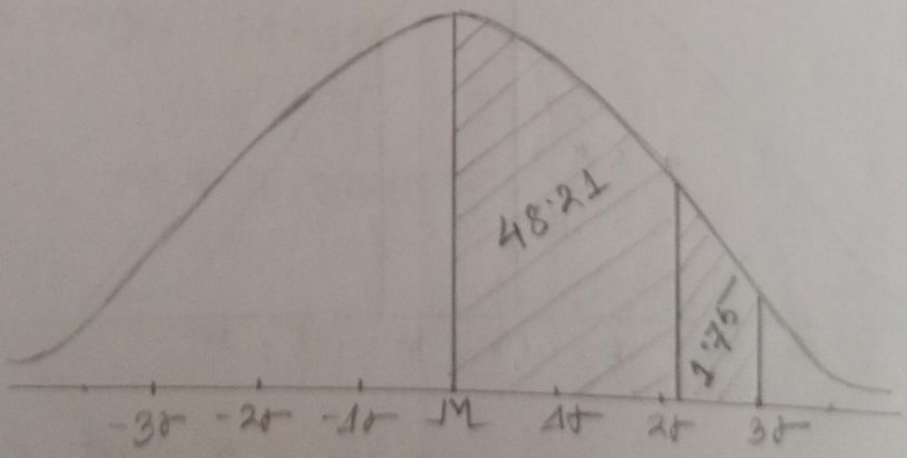
$$\frac{X - M}{\sigma}$$

$$= \frac{75.5 - 65}{5}$$

$$= \frac{10.5}{5}$$

$$= 2.1$$

∴ Table A অনুসৰি 75.5 (2.1σ) = 48.21



আমি জানো যে, গড় আৰু 3σ ৰ মাজত মুঠ 50% সামগ্ৰী আছে। গতিকে, 75 ৰ ওপৰত শতকৰা হাৰ হ'ব 50.00 − 48.21 = 1.79%

⑥ 55 ব তলত কিমান সামগ্রী আছে?

Soln: দিয়া আছে, $M = 65$

$\sigma = 5$

We know that,

55 ব নিম্নসীমা = 54·5

$\therefore$ 54·5 ব z মানাংক $= \frac{X - M}{\sigma}$

$= \frac{54.5 - 65}{5}$

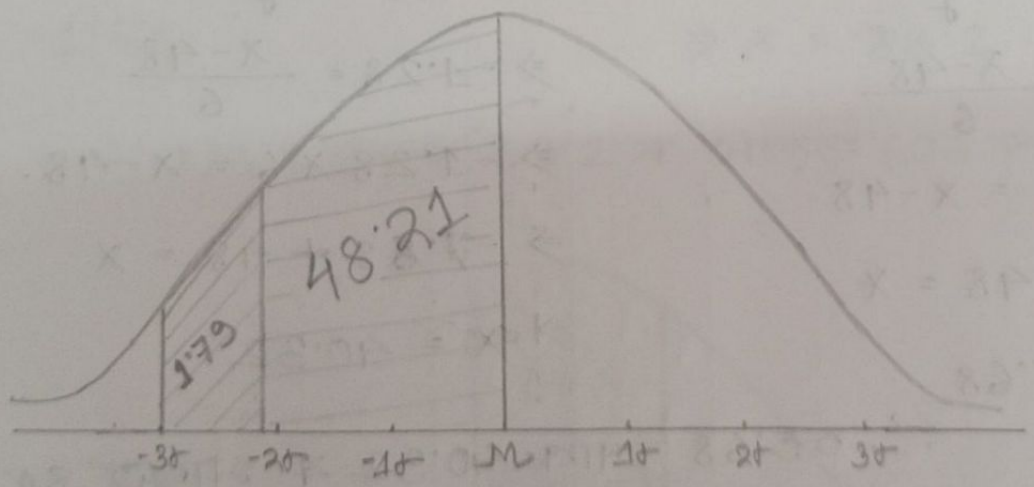
$= \frac{-10.5}{5}$

$= -2.1\sigma$

$\therefore$ Table A ব মতে 54·5 (-2.1σ) ব মান 48·21

We know that, গড় আৰু 3σ ব মাজত মুঠ 50% সামগ্রী আছে। গতিকে, 55 ব তলত শতকৰা মান হ'ব

50·00 − 48·21 = 1·79%



Application 2 :→ স্বাভাৱিক বিতৰণৰ নিৰ্বাচিত শতাংশৰ সীমা নিৰ্ণয় কৰা – ।

Example 1:→ কোনো এক স্বাভাৱিক বিতৰণৰ গড় 48 আৰু মানক বিচ্যুতি 6 । তলেত দিয়া শতাংশ সমূহৰ সীমা নিৰ্বাচন কৰা ।

@ কোন দুটা নম্বৰৰ মাজত মোঁহাজস্ব 80% সামগ্ৰী থাকে?

Soln→ We know that,

কোনো এক স্বাভাৱিক বিতৰণৰ মোঁহাজৰ 80% বুলিলে 40% গড়ৰ ওপৰত আৰু 40% গড়ৰ তলেত থকা বুজায় ।

∴ Table A ৰ মতে,

40% সামগ্ৰীৰ গড়ৰ z মান = 1·28

গতিকে, 80% ৰাশিৰ −1·28 σ আৰু 1·28 σ ৰ মাজত থাকিব

We know that,

$$z = \frac{x-M}{\sigma}$$

$$\Rightarrow 1{\cdot}28 = \frac{x-48}{6}$$

$$\Rightarrow 1{\cdot}28 \times 6 = x-48$$

$$\Rightarrow 7{\cdot}68 + 48 = x$$

$$\Rightarrow x = 55{\cdot}68$$

$$z = \frac{x-M}{\sigma}$$

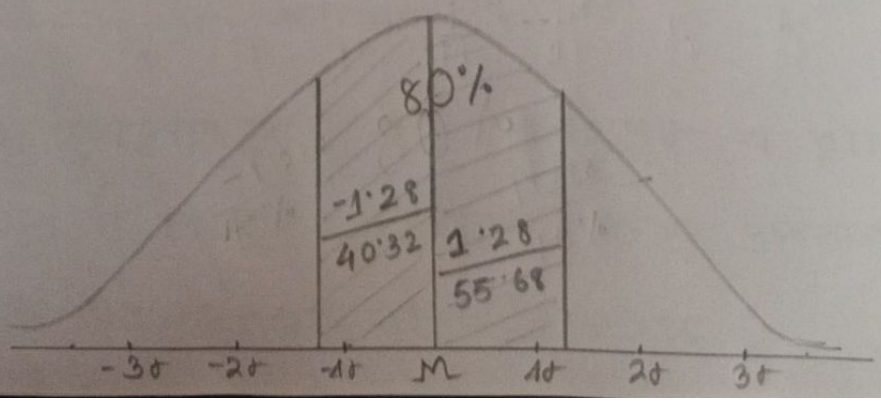
$$\Rightarrow -1{\cdot}28 = \frac{x-48}{6}$$

$$\Rightarrow -1{\cdot}28 \times 6 = x-48$$

$$\Rightarrow -7{\cdot}68 + 48 = x$$

$$\Rightarrow x = 40{\cdot}32$$

∴ 55·68 আৰু 40·32 ৰ মাজত 80% ৰাশি আছে ।



Example 2:- কোনো এক স্বাভাবিক বিতৰণৰ গড় 100 আৰু মানক বিচ্যুতি 20 । তলত দিয়া শতাংশৰ সীমা নিৰ্ধাৰণ কৰা ।

কোন দুটা সংখ্যাৰ মাজত মোঁহাজৰ 60% সামগ্ৰী থাকে

Sol:- We know that,

কোনো স্বাভাবিক বিতৰণৰ মোঁহাজৰ 60% বুলিলে 30% গড়ৰ ওপৰত আৰু 30% গড়ৰ তলত সকা বুজায় ।

∴ Table A ৰ পৰা পোৱা যায়,

30% সামগ্ৰীৰ গড় আৰু z মান হৈছে = 0·84

গতিকে, 60% বণ্টনৰ -0·84 আৰু 0·84 ৰ মাজত সন্নিবিষ্ট ।

We know that,

$$z = \frac{X - M}{\sigma}$$

$$\Rightarrow 0{\cdot}84 = \frac{X - 100}{20}$$

$$\Rightarrow 0{\cdot}84 \times 20 = X - 100$$

$$\Rightarrow 16{\cdot}8 + 100 = X$$

$$\Rightarrow X = 116{\cdot}8$$

$$z = \frac{X - M}{\sigma}$$

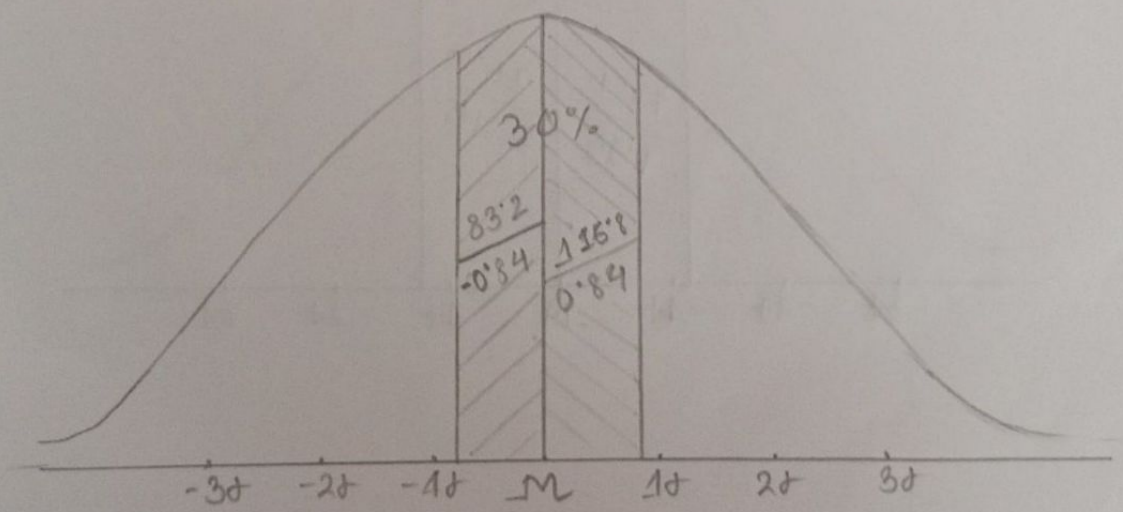
$$\Rightarrow -0{\cdot}84 = \frac{X - 100}{20}$$

$$\Rightarrow -0{\cdot}84 \times 20 = X - 100$$

$$\Rightarrow -16{\cdot}8 + 100 = X$$

$$\Rightarrow X = 83{\cdot}2$$

∴ 116·8 আৰু 83·2 ৰ মাজত 60% সামগ্ৰী সন্নিবিষ্ট



Example 3:⇒ গড় (M) = 20, প্রামক বিচ্যুতি (σ) = 6
মোঁমাজৰ 75% সামগ্রী নির্ণয় কৰা।

Sol:⇒ We know that, কোনো স্বাভাবিক বিতৰণৰ মোঁমাজৰ 75% বুলিলেলে 37.5% গড়ৰ ওপৰত আৰু 37.5% গড়ৰ তলত থকা বুজায়।

37.5 ৰ Z মান = 1.15

গতিকে, 75% বাগিৰ −1.15 আৰু 1.15 ৰ মাজত আছে।
We know that,

$$Z = \frac{X-M}{\sigma}$$

$$\Rightarrow 1.15 = \frac{X-20}{6}$$

$$\Rightarrow 1.15 \times 6 = X - 20$$

$$\Rightarrow 6.9 + 20 = X$$

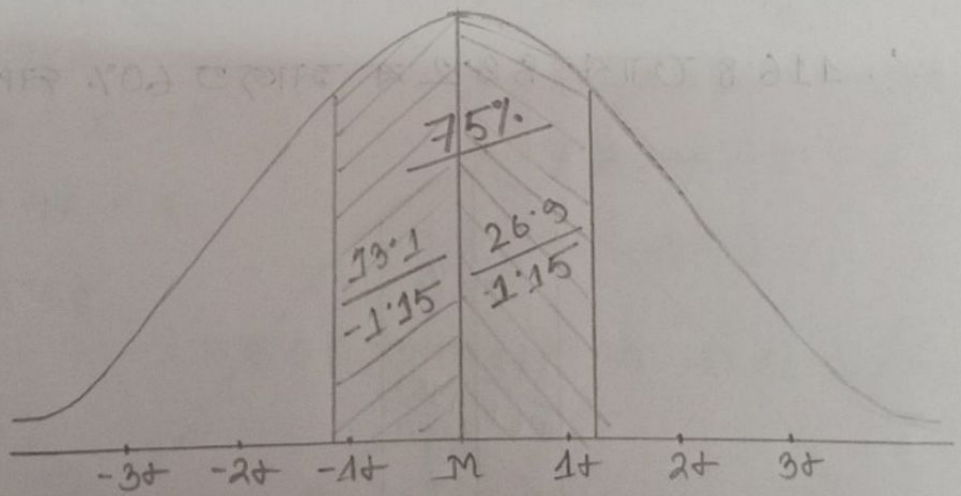
$$\Rightarrow X = 26.9$$

$$Z = \frac{X-M}{\sigma}$$

$$\Rightarrow -1.15 = \frac{X-20}{6}$$

$$\Rightarrow -1.15 \times 6 = X - 20$$

$$\Rightarrow -6.9 + 20 = X$$

$$\Rightarrow X = 13.1$$

∴ 26.9 আৰু 13.1 ৰ মাজত 75% সামগ্রী আছে।